http://dx.doi.org/10.18778/8220-034-8.02

Andrzej Indrzejczak
Uniwersytet Łódzki

O ROZUMIENIU ANALITYCZNOŚCI W TEORII DOWODU

W darze drogiemu Ryszardowi,
autorowi wielu głębokich analiz filozoficznych

1. Wstęp

Rozważania na temat analityczności są zdominowane przez prace dotyczące pojęcia analizy filozoficznej, rozumienia zdań/sądów analitycznych czy filozofii analitycznej jako takiej. Tymczasem w obrębie jednej z ważniejszych gałęzi logiki współczesnej, jaką bez wątpienia jest teoria dowodu, znaleźć można również interesujące zastosowania tego terminu. Co więcej, są one zakorzenione w tradycyjnych rozważaniach sięgających starożytności. Mam na myśli rozważania na temat metody czy, nieco węziej, dowodu analitycznego. Wydaje się, że współcześnie tradycja ta doczekała się interesujących rozwinięć na gruncie, i przy wykorzystaniu, narzędzi nowoczesnej teorii dowodu. Nastąpiło też pewne kategorialne przesunięcie samego terminu. Do początków ubiegłego stulecia kwalifikacja „analityczny" stosowała się do dowodu/metody jako przeciwstawna do kwalifikacji „syntetyczny". Wynikało to z faktu, że rozważano jedynie nieformalne dowody budowane przy użyciu nieskodyfikowanych środków. Tradycyjne systemy aksjomatyczne, których paradygmatycznym przypadkiem jest geometria (i inne działy matematyki), wyłożone w *Elementach* Euklidesa, nie zawierały ani definicji wykorzystywanych reguł, ani definicji dowodu, ograniczając się do wyliczenia aksjomatów i postulatów.

Logika współczesna zastąpiła nieformalne pojęcie systemu aksjomatycznego dobrze sprecyzowanym pojęciem dedukcyjnego systemu formalnego, niekoniecznie aksjomatycznego, relatywizując pojęcie dowodu do danego systemu, w szczególności do jego reguł. Z tego względu poniżej będzie mowa nie tylko o analitycznych dowodach, ale również analitycznych regułach i systemach dowodzenia. Oczywiście nie są to sprawy niezależne. Bez względu na to, jak rozumiemy analityczność, możemy się zgodzić co do tego, że jeżeli wszystkie reguły danego systemu są analityczne, to sam system jest analityczny, a to implikuje, że wszystkie dowody budowane z użyciem jego reguł są analityczne. Podobne zależności nie muszą jednak zachodzić w drugą stronę, co wynika z faktu, że oprócz reguł analitycznych w ścisłym tego słowa znaczeniu można też mówić o analitycznych zastosowaniach reguł, które analityczne same w sobie nie są; temat ten rozwiniemy w rodziałach 4 i 5.

Do tej pory nie wyjaśniliśmy, w jakim znaczeniu używamy określenia „analityczny" w odniesieniu do reguł/systemów/dowodów. Podobnie jak w przypadku innych użyć przydawki „analityczny"[1], mamy tutaj również do czynienia z dużym bogactwem propozycji. Do najważniejszych można zaliczyć następujące:

1. Dowód prowadzony przez równoważnościowe przekształcenia.
2. Dowód prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów).
3. Rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania (prostszych) podproblemów.
4. Reguły systemu są regułami dekompozycji (upraszczania, eliminacji stałych logicznych).
5. Reguły systemu mają własność podformuł.
6. Reguła cięcia jest eliminowalna.
7. Stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego z góry zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły).

Podane wyżej znaczenia nadawane terminowi „analityczny" są ze sobą ściśle powiązane, ale z pewnością nie identyczne. Pierwsze trzy z nich mają długą tradycję, co nie oznacza, że się obecnie zdezaktualizowały. W mniej lub bardziej sprecyzowanej formie pojęcie analitycznego dowodu w sensie 1 lub 2 można napotkać zarówno u filozofów (Platona, Arystotelesa, Proklosa), jak i matematyków (Euklidesa, Pappusa)[2]. Zdarza się, że oba rozumienia analitycznego dowodu się utożsamia, lecz niesłusznie; aby dowód był analityczny w sensie 2, nie jest konieczne stosowanie tylko równoważnościowych przekształceń. Poza tym znaczenie 2 odnosi się do dowodu rozumianego jako czynność (proces jego poszukiwania), podczas gdy znaczenie 1 można odnieść zarówno do czynności, jak i jej rezultatu, czyli gotowego dowodu w sensie pewnego tekstu. Ponadto ten ostatni wcale nie musiał być skonstruowany „od tyłu".

[1] Por. np. rozważania historyczne i listę definicji zdania analitycznego podaną przez Jana Woleńskiego (1993).

[2] Dokładniejsze historyczne ujęcie znaleźć można np. u Franceski Poggiolesi (2011).

Znaczenie 3 w oczywisty sposób odsyła nas do Kartezjusza i jego zaleceń metodologicznych o bardzo szerokim zastosowaniu. Warto jednak zauważyć, że ta dość ogólna idea znalazła również konsekwentne i bardziej formalne zastosowanie w jego projekcie geometrii analitycznej. Oto bardziej skomplikowane problemy geometryczne sprowadza się do wyrażeń algebraicznych i dokonuje ich rozwiązania w prostszy sposób.

Kolejne znaczenia powstały już na gruncie współczesnej teorii dowodu i mają ścisły związek z kształtem stosowanych reguł. Zwłaszcza przedostatnie rozumienie ma charakter ściśle techniczny. Toteż zanim dokonamy ich objaśnienia i porównania, musimy pokrótce przypomnieć podstawowe informacje na temat wybranych systemów dedukcyjnych. Zebrano je w następnym rozdziale, który może być pominięty przez czytelnika zorientowanego w problematyce teorii dowodu i systemów dedukcyjnych. W kolejnych trzech rozdziałach dokonamy analizy podanych wyżej znaczeń analityczności w odniesieniu do rozmaitych typów omawianych systemów oraz w powiązaniu z problematyką złożoności dowodowej. Ostatni rozdział zawiera uwagi związane z trzema innymi użyciami terminu „analityczny” w teorii dowodu. W całej pracy dla uproszczenia wywodów ograniczymy się zasadniczo do przykładów z zakresu formalizacji klasycznego rachunku zdań KRZ, marginalnie odnosząc się do formalizacji teorii matematycznych czy logik nieklasycznych.

2. Systemy dedukcyjne

Ograniczymy nasze rozważania na temat analityczności w dowodzeniu do czterech typów systemów dedukcyjnych: rachunku sekwentów RS, systemów tablicowych ST, dedukcji naturalnej DN i systemów rezolucji REZ. Przypomnimy tutaj przede wszystkim podstawowe informacje na temat RS jako najważniejszego narzędzia współczesnej teorii dowodu skonstruowanego w latach 30. przez Gerharda Gentzena.

Nazwa pochodzi od podstawowych jednostek, na których zdefiniowane są reguły. Są to pary uporządkowane skończonych zbiorów formuł o postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$, gdzie Γ to poprzednik, a Δ to następnik sekwentu. W wielu wariantach Γ i Δ nie są zresztą zbiorami, ale ciągami (np. w oryginalnym systemie Gentzena) bądź multizbiorami (zbiorami z powtórzeniami). Dla naszych potrzeb operowanie zbiorami jest wystarczające. Intuicyjnie zbiór formuł z poprzednika sekwentu możemy interpretować jako koniunkcję elementów, zbiór z następnika jako alternatywę, a strzałkę jako symbol dowiedlności. Upraszczając, można więc powiedzieć, że sekwent jest semantycznie poprawny wtw, gdy co najmniej jeden element następnika wynika z (wszystkich elementów) poprzednika. Standardowe wersje RS składają się z jednego schematu sekwentu aksjomatycznego oraz zbioru reguł pozwalających na dedukcję nowego sekwentu (sekwentu-wniosku) z pary sekwentów lub pojedynczego sekwentu (sekwenty-przesłanki). Jedna z popularniejszych wersji RS to rachunek G3, który w wersji dającej adekwatną formalizację KRZ składa się z następujących reguł:

$$(\neg\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\quad \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\varphi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\varphi,\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\quad \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\quad \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie reguły są niezawodne w tym sensie, że poprawność przesłanek gwarantuje poprawność wniosku. Za aksjomaty przyjmujesię dowolne sekwenty $\Gamma\Rightarrow\Delta$, w których $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$; oczywiście są one poprawne. Dowodem sekwentu jest drzewo binarne, którego każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, korzeń jest dowodzonym sekwentem, a poszczególne węzły są uzyskane w wyniku zastosowania wymienionych wyżej reguł.

Przedstawiona wersja wygodna jest dla porównań z systemami tablicowymi, ale odbiega of oryginalnego RS Gentzena nie tylko ze względu na inne rozumienie poprzednika i następnika, ale również ze względu na reguły i wybór sekwentów aksjomatycznych. Cechą charakterystyczną systemu G3 jest to, że wszystkie reguły są odwracalne, tzn. w semantycznych terminach nie tylko poprawność przesłanek gwarantuje poprawność wniosku, ale i na odwrót, poprawność wniosku gwarantuje poprawność każdej przesłanki. W oryginalnym systemie Gentzena nie wszystkie reguły są odwracalne. Na przykład nie są odwracalne reguły postaci:

$$(\wedge\Rightarrow')\quad \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\rightarrow\Rightarrow')\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$$

Ponadto oprócz reguł wprowadzających stałe logiczne występują tam tzw. reguły strukturalne cięcia i osłabiania:

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad (W \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow W)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

Aksjomaty zaś mają postać $\varphi \Rightarrow \varphi$. Nietrudno zauważyć, że aksjomaty wraz z regułami strukturalnymi kodują podstawowe własności relacji wynikania: zwrotność, przechodniość i monotoniczność. W G3 można udowodnić, że wszystkie te reguły są dopuszczalne, tzn. ich dołączenie nie prowadzi do dedukcji nowych sekwentów. Wszystkie reguły oprócz (Cut) posiadają tak zwaną własność podformuł, która sprowadza się do tego, że w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku. Choć w systemie Gentzena (Cut) jest regułą pierwotną, to jego główny wynik, tzw. twierdzenie o eliminacji cięcia, pokazuje, że każdy dowód w RS można przekształcić na dowód, w którym ta reguła nie jest użyta.

Kształt reguł G3 daje nam zatem pewną procedurę automatycznego szukania dowodu, którą można scharakteryzować następująco: zaczynamy od dowodzonego sekwentu i konstruujemy drzewo dowodowe, stosując reguły w porządku odwrotnym, od sekwentu-wniosku do sekwentów-przesłanek. Ponieważ na każdym kroku liczba wyborów jest ograniczona (skończona liczba formuł złożonych w sekwencie-wniosku), mamy tutaj do czynienia z ograniczonym niezdeterminowaniem procedury, który łatwo przekształcić w algorytm deterministyczny, np. narzucając porządek wyboru zawsze od lewej ku prawej. W KRZ daje to zawsze drzewo skończone, które jest bądź dowodem (każda gałąź zakończona sekwentem aksjomatycznym), bądź umożliwia falsyfikację sprawdzanego sekwentu, gdy co najmniej jedna gałąź zakończona jest sekwentem atomowym, ale nie aksjomatycznym.

Systemy tablicowe wywodzą się w prostej linii z RS i, przynajmniej w odniesieniu do logiki klasycznej, ich rozmaite warianty można potraktować jako uproszczenia RS[3]. Jeżeli podstawową funkcją systemu ma być wykorzystanie do (automatycznej) konstrukcji dowodu, to RS w podanej wyżej postaci wciąż wydaje się nadmiernie skomplikowane. Narzuca się jako oczywiste uproszczenie przedefiniowanie reguł wynikające z faktycznego porządku ich stosowania przy konstrukcji dowodu: od sekwentu-wniosku do sekwentów-przesłanek. W tym ujęciu wniosek staje się przesłanką, a przesłanki wnioskami, natomiast dowód jest drzewem odwróconym. Można też wyeliminować sekwenty na rzecz zbiorów

[3] Uwaga ta jest słuszna w odniesieniu do logiki klasycznej, gdyż w przypadku wielu logik nieklasycznych proponowane systemy RS i ST często nie pozostają w tak czytelnym związku.

formuł, z tym że w grę wchodzą dwie możliwości. Jeżeli w każdym sekwencie przestawimy wszystkie formuły z poprzednika do następnika (z pomocą ($\Rightarrow\neg$)), to otrzymujemy sekwenty prawostronne o postaci $\Rightarrow \neg\Gamma, \Delta$. Operacja odwrotna daje nam sekwenty lewostronne o postaci $\Gamma, \neg\Delta \Rightarrow$. W obu wypadkach strzałka staje się zbędna; operujemy po prostu zbiorami interpretowanymi w pierwszym przypadku jako alternatywy elementów, a w drugim jako ich koniunkcje. Rozwiązanie pierwsze było m.in. zastosowane przez Kurta Schüttego (1977) oraz przez Helenę Rasiową i Romana Sikorskiego (1963)[4]. Drugie podejście zostało zaproponowane przez Jaakko Hintikkę (1955). Przykładowe reguły dla koniunkcji w obu typach ST wyglądają następująco:

$$(\wedge)\quad \frac{\Gamma, \varphi \wedge \psi}{\Gamma, \varphi \quad \Big| \quad \Gamma, \psi} \qquad\qquad (\neg\wedge)\quad \frac{\Gamma, \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Gamma, \neg\varphi, \neg\psi}$$

$$(\wedge)\quad \frac{\Gamma, \varphi \wedge \psi}{\Gamma, \varphi, \psi} \qquad\qquad (\neg\wedge)\quad \frac{\Gamma, \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Gamma, \neg\varphi \quad \Big| \quad \Gamma, \neg\psi}$$

Oba systemy zawierają też regułę:

(*NN*) $\Gamma, \neg\neg\varphi \,/\, \Gamma, \varphi$

W obu wypadkach dowodem zbioru dla Γ jest odwrócone drzewo binarne zaczynające się od tego zbioru jako korzenia, w którym każda gałąź kończy się zbiorem zawierającym parę formuł sprzecznych. Jak widać, oba systemy są dualne, co wynika z innej interpretacji przekształcanych zbiorów. System Rasiowej i Sikorskiego jest systemem bezpośrednim, gdyż konstruuje się tutaj dowody wprost. Chcąc skonstruować dowód dla φ, zaczyna się konstrukcję drzewa od zbioru $\{\varphi\}$, a zbiór zawierający parę formuł sprzecznych uzyskany w każdej gałęzi to tautologia (alternatywa zawierająca prawo wyłączonego środka). W przypadku KRZ i po dołączeniu wymogu, że zawsze kontynuujemy procedurę aż do momentu uzyskania w każdej gałęzi zbiorów atomowych, można zatem spojrzeć na ten wariant ST jako na pewną formę implementacji procedury sprowadzania do postaci koniunkcyjno-alternatywnej stosowaną w dowodzie pełności metodą Posta. System Hintikki jest systemem falsyfikacji, konstruującym dowody nie wprost. Chcąc skonstruować dowód dla φ, zaczyna się konstrukcję drzewa od zbioru $\{\neg\varphi\}$, a zbiór zawierający parę formuł

[4] Praca Ewy Orłowskiej i Joanny Golińskiej-Pilarek (2011) dostarcza wyczerpującego omówienia zastosowań tego paradygmatu do licznych logik i teorii formalnych.

sprzecznych uzyskany w każdej gałęzi kończy dowód. Tutaj dla odmiany każde drzewo, które kończy się zbiorami atomowymi, daje nam postać alternatywno-koniunkcyjną dla formuły wyjściowej.

Dalsza ewolucja ST nawiązywała częściej do ujęcia Hintikki i prowadziła do kolejnych uproszczeń. Z punktu widzenia zastosowania ST, np. w dydaktyce logiki, system Hintikki nadal nie wydaje się idealny, zawiera bowiem nużący element przepisywania formuł parametrycznych. Rozwiązaniem tego problemu jest wersja ST wprowadzona niezależnie przez Everta Betha (1955) i jej kolejne uproszczenie wypracowane przez Raymonda Smullyana (1968). W tej ostatniej wersji, która jest chyba najbardziej popularna, budujemy drzewo binarne, w którym każdy węzeł zawiera pojedynczą formułę, a nie zbiór czy sekwent. Konstrukcję drzewa dowodowego dla sekwentu $\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ zaczynamy od drzewa z jedną gałęzią o długości $k+n$, które zawiera wszystkie elementy poprzednika i zanegowane elementy następnika. Do formuł występujących w punktach drzewa stosujemy reguły, które otrzymujemy z reguł Hintikki przez skreślenie zbioru parametrów Γ. Drzewo, w którym każda gałąź zawiera parę formuł sprzecznych, stanowi dowód sekwentu, natomiast każda gałąź otwarta (niezawierająca sprzeczności) i zakończona (każde zastosowanie reguł do formuł z tej gałęzi daje tylko nowe wystąpienia formuł wyżej już obecnych) daje interpretację falsyfikującą.

Łatwo zauważyć, że reguły ST również spełniają własność podformuł, a raczej jej uogólnienie, gdyż wnioski zbudowane są z podformuł przesłanek domkniętych na pojedynczą negację.

Systemy dedukcji naturalnej DN zostały stworzone niezależnie przez Stanisława Jaśkowskiego (1934) i Gentzena (1934), aby wyrazić formalnie tradycyjne metody dowodzenia stosowane w praktyce od starożytności. Od tego czasu rozmaite warianty DN rozpowszechniły się przede wszystkim w setkach podręczników. Ze względu na ich popularność ograniczymy się jedynie do przypomnienia najbardziej charakterystycznych cech DN[5]. Najprościej rzecz ujmując, systemy DN charakteryzują się tym, że:

1) pozwalają na wprowadzanie dodatkowych założeń oraz ich eliminowanie (co związane jest z zamykaniem odpowiednich poddowodów);
2) zamiast aksjomatów używają reguł inferencji, które pozwalają wprowadzać i eliminować stałe logiczne z dowodu;
3) dopuszczają różne formy dowodu i strategie jego poszukiwania (wprost, nie wprost, rozgałęzione itp.).

Punkty 1 i 3 powyższej charakterystyki powodują, że w skład systemów DN oprócz reguł inferencji wchodzą specjalne reguły konstrukcji

[5] Por. dokładniejsze omówienie (Indrzejczak 2010).

dowodu. To sprawia, że struktura systemu jest bardziej skomplikowana niż w przypadku systemów aksjomatycznych, ale za to poszukiwanie dowodów jest znacznie prostsze. Chociaż współcześnie istnieje duża mnogość systemów tego typu, różniących się znacznie nie tylko doborem reguł, ale i sposobem budowy dowodu, to w istocie wszystkie można sprowadzić do trzech typów, z których dwa wywodzą się z prac Gentzena (1934, 1936), a jeden od Jaśkowskiego (1934). Pominiemy charakterystykę sekwentowego DN, wprowadzonego przez Gentzena w 1936 r., ograniczając się do omówienia dwóch typów DN operujących na formułach: Gentzenowskiego z dowodami w kształcie drzew i Jaśkowskiego z dowodami liniowymi. W obu przypadkach reguły inferencji (p. 2) zdefiniowane są na formułach, a nie na sekwentach. Jeżeli chodzi o dobór reguł inferencji i konstrukcji dowodu, to systemy Jaśkowskiego i Gentzena różnią się nieznacznie. KRZ można scharakteryzować następująco:

Reguły inferencji:

($\bot$) $\varphi, \neg\varphi / \bot$ i $\bot / \varphi$

($\wedge D$) $\varphi, \psi / \varphi \wedge \psi$

($\wedge E$) $\varphi \wedge \psi / \varphi$ i $\varphi \wedge \psi / \psi$

($\vee D$) $\varphi / \varphi \vee \psi$ i $\psi / \varphi \vee \psi$

($\rightarrow E$) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi$

Reguły konstrukcji dowodu:

($\neg E$) Jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Gamma \vdash \varphi$

($\vee E$) Jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ i $\Delta, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \chi$

($\rightarrow D$) Jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Reguły konstrukcji dowodu wyrażają dowód nie wprost, dowód rozgałęziony i dowód warunkowy (twierdzenie o dedukcji). W każdym przypadku schemat wyraża zależność następującą: jeżeli poddowód zainicjowany dodatkowym założeniem φ (w przypadku ($\vee E$) dwa poddowody; drugi zaczęty przez ψ) zakończy się sukcesem, to w nadrzędnym dowodzie dopisujemy odpowiednią formułę (np. χ ($\vee E$), która już od dodatkowych założeń nie zależy, a tylko od wyjściowych (Γ, Δ).

Główna różnica między DN Gentzena a Jaśkowskiego leży w definicji dowodu. Gentzen używa formy drzewa, w którym każdy liść jest założeniem, względnie aksjomatem, a korzeń dowodzoną formułą. Przejścia między węzłami regulowane są przez podane wyżej reguły. W DN Jaśkowskiego dowód konstruowany jest jako ciąg formuł, co jest wygodniejsze i bardziej ekonomiczne (używamy formuł, a nie ich wystąpień), ale zmusza do zastosowania dodatkowych środków graficznych w celu odseparowania zamkniętych poddowodów od dowodu nadrzędnego. Jaśkowski używał w tym celu najpierw prostokątów, a potem indeksów wierszy; większość obecnie używanych w praktyce systemów DN wykorzystuje tego typu rozwiązania. Liniowy format dowodu w stylu Jaśkowskiego zdominował podręcznikowe zastosowania DN, natomiast drzewne dowody Gentzena są stosowane przede wszystkim w teoretycznych opracowaniach.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do RS czy ST w odniesieniu do DN nie można mówić o własności podformuł w przypadku wszystkich reguł.

W dziedzinie badań nad automatyzacją dowodzenia twierdzeń niemal przemysłowym standardem są systemy rezolucyjne REZ. Odkąd John Alan Robinson (1965) wprowadził regułę rezolucji w swoim artykule z 1965 r., jest ona w wielu wariantach wykorzystywana aż po dzień dzisiejszy. Obszerne omówienie metody rezolucji można znaleźć w wielu pracach, np. u C.L. Changa i R.C.T. Lee (1973) czy Jeana Henriego Galliera (1986), toteż ograniczymy się tutaj do wiadomości elementarnych. Klasyczne wydanie metody rezolucji dla rachunku zdań można ująć w 3 krokach:

1. Negujemy dowodzoną formułę (względnie tworzymy koniunkcję przesłanek i negacji wniosku, jeśli sprawdzamy rozumowanie).
2. Sprowadzamy do koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej.
3. Do zbioru klauzul, czyli alternatyw złożonych ze zmiennych lub ich negacji (tzw. literałów), stosujemy regułę rezolucji (Rez) o postaci:

$$\Gamma, \varphi; \Delta, \neg\varphi \,/\, \Gamma, \Delta$$

Jeżeli w wyniku *n*-krotnego zastosowania rezolucji do zbioru klauzul uzyskamy klauzulę pustą (czyli $\perp$), to analizowana formuła jest tezą (lub wniosek wynika z przesłanek), w przeciwnym razie można utworzyć wartościowanie falsyfikujące.

Formalna prostota i duża efektywność spowodowały, że w latach 70. rezolucja była nieomal jedynym rodzajem systemu dedukcyjnego praktycznie wykorzystywanym w programach automatycznego dowodzenia twierdzeń. Zwłaszcza, że w połączeniu ze *skolemizacją* i *unifikacją* okazała się ona bardzo skutecznym narzędziem dowodzenia twierdzeń w logice pierwszego rzędu. Dopiero próby tworzenia systemów tego rodzaju dla logik nieklasycznych ukazały pewne ograniczenia. Podstawowym problemem przy próbach poszerzenia zastosowań rezolucji okazał się brak odpowiednich form postaci normalnych w wielu logikach nieklasycznych.

Jest jeszcze jeden problem związany z rezolucją. System jest formalnie bardzo prosty, ale konstruowane dowody na ogół są mało czytelne dla człowieka. Nie jest to wadą wtedy, gdy interesuje nas tylko szybkie otrzymanie wyniku, ale staje się poważnym problemem wtedy, gdy zainteresowani jesteśmy również samą konstrukcją dowodu. Pojawiły się ostatnio prace[6], w których porusza się kwestie czytelnej dla człowieka reprezentacji dowodów w systemach rezolucyjnych, jest to jednak nadal problematyka słabo spenetrowana.

Mimo tych minusów trudno jest podważyć dominującą pozycję rezolucji w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. Na przestrzeni 50 lat opracowano olbrzymią liczbę strategii optymalizujących proces szukania dowodu dostosowanych do rezolucji. Co jest dla nas istotne, to fakt, że reguła rezolucji jest w zasadzie szczególnym przypadkiem reguły cięcia, zdefiniowanym na klauzulach (a nie sekwentach) i ograniczonym do literałów (formuły atomowe i ich negacje). Co więcej, tak się złożyło, że w grupie systemów ważnych dla automatycznego dowodzenia twierdzeń dominują te, które w jakiś sposób korzystają z pewnej formy cięcia. Reguła ta *explicite* występuje jako reguła rezolucji w systemach, które noszą tę nazwę, natomiast w innych, np. w systemach opartych na procedurze Martina Davisa i Hilary'ego Putnama (1960) oraz w systemach koneksji, jej obecność ma trochę bardziej zakamuflowany charakter.

3. Analityczność jako własność podformuł

Zanim objaśnimy podane wyżej znaczenia 4–7 analityczności w terminach systemów dedukcji opisanych w poprzednim rozdziale, warto zauważyć, że zarówno RS (bez (Cut)), jak i ST w pewien sposób formalnie realizują w swojej koncepcji dowodu tradycyjne trzy rozumienia analityczności. Znaczenia 1 i 2 są wynikiem zastosowania obustronnych reguł oraz sposobu konstrukcji dowodu od tyłu, tj. od dowodzonej tezy. Najbardziej bezpośrednio oba te rozumienia analityczności są wyrażone w ST typu Schüttego (zarówno reguły, jak i definicja dowodu), ale inne warianty też w bardziej pośredni sposób się do tych rozumień analityczności odnoszą. Zauważmy, że znaczenie 2 może być realizowane również w systemach RS czy ST, w których nie wszystkie reguły są obustronne (jest

[6] Por. np. (De Nivelle, Schmidt, Hustadt 2000).

tak np. we wzbogaceniach omawianych systemów dla logik modalnych). Jednak w takich systemach procedury poszukiwania dowodu od tyłu nieco się komplikują, gdyż w pewnych sytuacjach uzyskanie gałęzi niekończącej się aksjomatem nie kończy konstrukcji, ale zmusza do powrotu (tzw. *backtracking*) do tego etapu, w którym wykorzystana nieobustronna reguła doprowadziła do wyboru pewnej ewentualności. Również znaczenie 3 jest reprezentowane w tych systemach; jest to najbardziej widoczne w RS. Konstruowanie dowodu od dołu można postrzegać jako sukcesywne upraszczanie zadania typu dowiedź. Każdy sekwent-przesłanka jest bowiem prostszy od wniosku, a sekwenty atomowe są w bezpośredni sposób oceniane jako dowiedlne lub nie. Warto przy tym zauważyć, że uzyskany dowód realizuje nie tylko koncepcje Kartezjusza, ale i Gottfrieda Wilhelma Leibniza, gdyż aksjomaty uznać można za postulowane przez niego logiczne zasady tożsamości.

Choć podaliśmy aż cztery różne rozumienia analityczności wyodrębnione na gruncie teorii dowodu, to znaczenie 4 ma zdecydowanie inny charakter niż pozostałe trzy. Z tego względu można powiedzieć, że termin „analityczny" używany jest w badaniach nad systemami dowodzenia twierdzeń dwojako. W znaczeniu 4 przeciwstawia się systemy analityczne jako te, w których reguły pozwalają tylko rozbijać formuły na ich części składowe, systemom syntetycznym, w których reguły przeciwnie, pozwalają składać formuły z podformuł. Z tego punktu widzenia systemy tablicowe byłyby systemami analitycznymi, natomiast RS bez (Cut) byłby systemem syntetycznym, a systemy DN są – z tego punktu widzenia – systemami mieszanymi, w których reguły pozwalają zarówno na dekompozycję, jak i składanie. Jednak takie rozróżnienia są pochodną jedynie sposobu definiowania reguł i dowodu w danym systemie. Jeżeli za podstawę przyjąć faktyczny porządek konstrukcji drzew dowodowych, a nie definicje reguł i dowodu, to RS (bez(Cut)) jest systemem analitycznym w takim samym sensie jak systemy tablicowe. W przypadku DN sprawa jest bardziej złożona, ale, jak pokażemy w rozdziale *Analityczność a cięcie*, również można mówić o analitycznych dowodach i analitycznych wersjach DN.

Pozostałe trzy znaczenia są ze sobą ściśle związane, a nawet czasem utożsamiane. Wznaczeniu 5 za systemy analityczne uważa się takie, w których reguły spełniają wspomnianą wyżej własność podformuł lub jakieś jej uogólnienie. Zgodnie z tym warunkiem konkluzje stosowanych reguł należą do zbioru podformuł przesłanek, ewentualnie do jakiegoś dobrze zdefiniowanego nadzbioru tego zbioru (np. domknięcia na pojedynczą negację). Analityczność w takim znaczeniu oznacza eliminację indeterminizmu w poszukiwaniu kolejnych kroków konstrukcji dowodu; wybory ograniczone są do podformuł tej formuły (czy zbioru formuł), której dowód usiłujemy skonstruować.

Warto zauważyć, że jeżeli za podstawę kwalifikacji systemów przyjąć nie definicję reguł i dowodu w RS, ale sam fakt posiadania własności podformuł, to RS bez (Cut) jest systemem analitycznym w lepszym wydaniu niż system tablicowy, gdzie ta własność występuje w postaci uogólnionej (domknięcie na negację). Jest to uzasadnione zarówno odwracalnością reguł w systemie G3, jak i powszechną praktyką konstruowania dowodów w RS (3). Otóż jak już wspominaliśmy w poprzednim rozdziale, w praktyce dowód najczęściej konstruuje się od dołu, zaczynając od sekwentu dowodzonego i systematycznie poszukując dla niego możliwych przesłanek. Każdy system, który posiada własność podformuł (analityczny w sensie 5), będziemy określać jako ściśle analityczny.

W tym miejscu wypada rozpatrzyć dość techniczny sens analityczności (znaczenie 6), jaki pojawia się w szczególności w pracach dotyczących sekwentowych formalizacji. Problem polega na tym, że często utożsamia się analityczność w sensie 5 z zachodzeniem twierdzenia o eliminacji cięcia. Czy słusznie? Zauważmy, że w RS dla logiki klasycznej wszystkie reguły oprócz reguły cięcia posiadają własność podformuł, zatem jeśli cięcie daje się wyeliminować, to otrzymany system jest ściśle analityczny. To spowodowało, że tradycyjnie zwykło się utożsamiać tak rozumianą analityczność z eliminowalnością cięcia. Jest to jednak pogląd mylny, ponieważ sama eliminowalność cięcia w systemach o bogatszym aparacie formalnym nie gwarantuje własności podformuł. Jest wiele systemów dla logik nieklasycznych, w których wprawdzie cięcie jest eliminowalne, ale nie są one analityczne w tym znaczeniu. Jest tak dlatego, że nieusuwalne są inne reguły tych systemów, które własności podformuł nie spełniają. Zdarza się tak w przypadku formalizacji logik nieklasycznych z większą liczbą reguł bądź formalizacji w rozbudowanym języku. Pojawiają się tam dodatkowe reguły niespełniające własności podformuł lub dodatkowe komplikacje związane z większą złożonością aparatu formalnego. Dobrym przykładem może być *Display Calculus* Nuela Belnapa (1982) – bardzo ogólna forma RS. W systemie tym cięcie jest eliminowalne, ale aby uznać ten bogaty formalizm za analityczny, potrzebna jest jeszcze tzw. własność podstruktur, a ta w ogólności nie zachodzi. Innym przykładem może być RS Grigoriego Mintsa (1970) dla modalnej logiki S5, które mimo eliminowalności cięcia również nie jest analityczne ze względu na specyficzną regułę wprowadzania konieczności.

Zatem eliminowalność cięcia nie jest warunkiem wystarczającym analityczności systemu. Może jest jednak warunkiem koniecznym, choć niewystarczającym, analityczności (przynajmniej w sensie 5)? Jak dalej pokażemy, nie jest również warunkiem koniecznym analityczności, a co gorsza, może być wręcz szkodliwa z punktu widzenia efektywności systemu.

4. Analityczność jako ograniczenie pola poszukiwań dowodu

W ten sposób doszliśmy do ostatniego rozumienia analityczności (znaczenie 7), przy którym ani własność podformuł dla reguł (czy to w sensie ścisłym, czy uogólnionym), ani eliminacja cięcia nie jest wymagana (czyli nie jest nawet warunkiem koniecznym). Wystarczy, że wszystkie dowody konstruowane w systemie spełniają własność podformuł lub jakieś jej uogólnienie. Mówiąc ogólnie, analityczność w tym najsłabszym znaczeniu oznacza po prostu eliminację indeterminizmu w poszukiwaniu kolejnych kroków konstrukcji dowodu. System ściśle analityczny dobrze spełnia tę funkcję, ale nie jest do tego niezbędny. Wybory ograniczone do podformuł tego sekwentu, którego dowód usiłujemy skonstruować, też gwarantują ograniczenie przestrzeni poszukiwań. W przypadku RS powiemy, że w dowodzie $\Gamma \Rightarrow \Delta$ zastosowanie reguły jest analityczne wtw, gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko formuły należące do zbioru podformuł $\Gamma \cup \Delta$. Dla ST definicja ta przybiera następującą postać: w dowodzie dla Γ zastosowanie reguły jest analityczne wtw, gdy każdy wniosek należy do zbioru podformuł przesłanek dowodu (czyli Γ) domkniętego na pojedyncze negacje.

Każde zastosowanie reguły, w którym przesłanki zawierają tylko podformuły dowodzonego sekwentu, określać będziemy jako analityczne zastosowanie tej reguły, natomiast system, w którym każda reguła jest stosowana analitycznie (czyli każdy dowód spełnia własność podformuł), określimy jako system *analityczny*. Oczywiście każdy system ściśle analityczny (tj. składający się tylko z reguł spełniających własność podformuł) jest systemem analitycznym, ale nie odwrotnie. Dowolny system analityczny, ale nie ściśle analityczny, określać będziemy jako system słabo analityczny. Pojęcie analitycznego zastosowania reguły można zdefiniować zresztą dla każdego z rozważanych przez nas systemów, nie tylko dla RS i ST. Dlatego dowolny system, w którym ograniczamy się tylko do takich użyć reguł, będziemy dalej określali jako analityczny.

Zauważmy, że nawet (Cut) można ograniczyć do zastosowań analitycznych[7], a ponadto może się to okazać korzystne. Poczynając od lat 60. powstało wiele systemów RS i ST dla różnych logik nieklasycznych, w których cięcie nie daje się wyeliminować. Przez wiele lat uważano,

[7] Można wprowadzić jeszcze mocniejsze pojęcie analitycznego cięcia, w którym cut-formuła należy do zbioru podformuł sekwentu-wniosku danego zastosowania (Cut); tak np. definiuje się analityczny (Cut) Heinrich Wansing (1999). Dla naszych potrzeb elastyczniejsze pojęcie, przy którym dopuszczalna jest każda podformuła sekwentu końcowego dowodu, jest jednak wygodniejsze.

że niemożliwość usunięcia reguły cięcia jest wadą. Pozytywną rolę reguły cięcia zaczęto dostrzegać dopiero stosunkowo niedawno. Wcześniej zauważano jedynie, że dla wielu logik nieklasycznych nie można uzyskać systemów RS czy ST, o ile nie uwzględni się przynajmniej pewnych użyć tej reguły (np. [Fitting 1983] czy [Takano 1992] w systemach dla logik modalnych). Takie kompromisy uważano jednak za zło konieczne.

Pogłębiające się badania nad złożonością obliczeniową automatycznych procedur poszukiwania dowodu pokazały jednak, że nawet tam, gdzie cięcie jest eliminowalne, opłacalne jest jego kontrolowane użycie. Może ono prowadzić do znacznego skrócenia dowodu, gdyż drzewo dowodowe posiada znacznie mniej rozgałęzień i powtórzeń pewnych sekwencji reguł[8].

Nie wydaje się to dziwne; cięcie wyraża przecież jedną z najważniejszych własności relacji wynikania, mianowicie jej przechodniość. Uciekanie od tej własności wydaje się zabiegiem sztucznym i – jak się okazało – ma swoje niebagatelne koszta po stronie efektywności. Zasadniczo na gruncie badań nad automatycznym dowodzeniem była to prawda już dawno znana, tylko rzadko dostrzegana. W końcu reguła rezolucji to tylko szczególna forma cięcia. A przecież nawet zwolennicy metod tablicowych zwracający uwagę na ich większą naturalność przyznawali, że systemy rezolucyjne są od systemów tablicowych bardziej efektywne.

Systemy tablicowe pod wieloma względami wydają się lepszym rodzajem formalizmu niż rezolucja. Wprawdzie opierają się na dużej liczbie reguł, a nie na jednej, jak rezolucja, co z punktu widzenia implementacji może wydawać się wadą, ale reguły te mają jednolity charakter. Są łatwe w zastosowaniu i intuicyjne, co powoduje, że proces poszukiwania dowodu jest „łatwy" nie tylko dla maszyny, ale i dla człowieka (stąd duży sukces systemów tablicowych w dydaktyce). Nie wymagają też sprowadzania do postaci normalnych. Ta ostatnia własność systemów tablicowych jest jedną z przyczyn większej popularności tego formalizmu w badaniach nad logikami nieklasycznymi. Stosunkowo dużo logik nieklasycznych posiada charakteryzacje tablicowe, czego dobrym przykładem może być np. *Handbook of Tableau Methods* (1999) czy (Priest 2001), natomiast liczba logik nieklasycznych formalizowanych bezpośrednio (tj. bez pomocy przekładu) za pomocą systemów rezolucyjnych jest dosyć skromna (por. [Fariñas del Cerro, Herzig 1995] dla modalnych).

Zresztą pierwsze komputerowe programy dowodzenia twierdzeń istotnie oparte były o RS i ST; wymienić tu można np. pionierskie prace Daga Prawitza (Prawitz, Prawitz, Voghera 1960) czy Hao Wanga (1960).

[8] Zwrócił na to uwagę po raz pierwszy George Boolos (1984). Por. też obszerne omówienie w (D'Agostino 1999) i (Fitting 1996).

Jednak w latach 70. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń triumfy święciła rezolucja, a znajomość systemów RS czy ST w kręgach specjalistów z tej dziedziny wydawała się znikoma. Najlepiej widać to w podręcznikach poświęconych automatycznemu dowodzeniu twierdzeń[9]. Pierwsze prace porównujące rezolucję z RS lub ST pojawiają się stosunkowo późno, np. (Gallier 1986) czy (Avron 1993). Chociaż w latach 80. systemy tablicowe zaczęto ponownie postrzegać jako skutecznego rywala dla rezolucji, to rozwój badań nad teorią złożoności obliczeniowej spowodował ponowne ostudzenie zapału. Okazało się, że z punktu widzenia złożoności obliczeniowej, mierzonej górną granicą przestrzeni poszukiwania dowodu, metody tablicowe nie mogą rywalizować nie tylko z rezolucją, ale i z tabelkowym sprawdzaniem, które w potocznym odczuciu logików uchodziło za szczyt niefektywności. Paradoksalnie źródłem problemu okazało się to, co przez wiele lat uchodziło za podstawę sukcesu tej metody – eliminacja cięcia. Rozwiązaniem problemu okazało się kontrolowane użycie (Cut), w szczególności oparte na analitycznych ograniczeniach.

5. Analityczność a cięcie

Reguła rezolucji – jak wspomnieliśmy – jest pewną formą cięcia, jednak standardowe systemy rezolucyjne dla KRZ są analityczne w podanym wyżej znaczeniu. Jest tak dlatego, że w klauzulach, które uczestniczą w dowodzie, występują jedynie te atomy, które są składnikami dowodzonej formuły, i ich negacje. W obrębie badań nad sekwentowymi i tablicowymi formalizacjami logik nieklasycznych również okazało się, że chociaż cięcie nie zawsze daje się wyeliminować, to czasem można je ograniczyć do użyć analitycznych (czyli ograniczonych tylko do podformuł dowodzonej formuły (sekwentu)) i też uzyskać adekwatną formalizację. Czasami trzeba warunki zastosowania cięcia jeszcze bardziej zliberalizować, np. na domknięcie zbioru podformuł na pojedyncze dostawienie funktorów modalnych. Przykładem takich wersji RS dla pewnych logik modalnych są wspomniane już systemy zaproponowane przez Takano (1992) i Fittinga (1983) (por. też [Goré 1999]). Inne rozwiązanie to ograniczenie użyć (Cut) do specyficznych formuł (np. identyczności w systemie dla logik hybrydowych w [Indrzejczak, Zawidzki 2013]).

Skoro eliminacja cięcia nie tylko nie jest niezbędna dla automatycznego dowodzenia twierdzeń, ale i jest wręcz szkodliwa z punktu widzenia efektywności, to w wielu systemach tablicowych zaczęto (analitycznie

[9] Np. popularne i wpływowe prace (Chang, Lee 1973) czy (Loveland 1978) w ogóle nie wspominają o RS czy ST.

ograniczone) cięcie dołączać do zestawu reguł jako dodatkowy środek dowodzenia, mimo iż były to systemy pełne bez tej reguły. Konstrukcję systemu KE, utworzonego przez Marco Mondadoriego i Marcello D'Agostino (por. (D'Agostino 1999)), można uznać za punkt kulminacyjny nurtu faworyzującego stosowanie cięcia. W KE cięcie jest regułą pierwotną (nieeliminowalną) i jedyną, która prowadzi do rozgałęzień. Regułę tą określa się na gruncie KE jako (PB) (*principle of bivalence*), nawiązując do jeszcze innej (semantycznej) interpretacji cięcia jako prawa wyłączonego środka. Pozostałe reguły rozgałęziające zostały zastąpione przez ich liniowe (tzn. nierozgałęziające) warianty. Dowody w KE są zatem binarnymi drzewami konstruowanymi według takich samych zasad jak w systemie Smullyana, z tym że zamiast reguł rozgałęziających z jedną przesłanką stosujemy reguły liniowe, za to z dwiema przesłankami. Na przykład reguła dla zanegowanej koniunkcji wygląda następująco:

$(\neg\wedge)\ \neg(\varphi \wedge \psi), \varphi \,/\, \neg\psi$

Dowody konstruowane w KE odznaczają się dużą elegancją i prostotą. Pełność systemu dla KRZ wymaga tylko analitycznych użyć cięcia, i to o bardzo sprecyzowanym charakterze. D'Agostino (1999) zawiera opis procedury poszukiwania dowodu, która odwołuje się do (PB) tylko wtedy, gdy na gałęzi mamy formułę taką jak np. zanegowana koniunkcja (lub alternatywa czy implikacja), a nie mamy żadnej z jej (zanegowanych) podformuł na tej gałęzi. W takim przypadku wybieramy jedną z nich i jej negację jako cut-formuły. Łatwo zauważyć, że w KE można p-symulować[10] każde drzewo dowodowe w ST Smullyana. Jeżeli ST-drzewo ma n węzłów i k rozgałęzień, to odpowiednie KE-drzewo ma w najgorszym-przypadku $n + k$ węzłów, gdyż w każdym rozgałęzieniu przez (PB) w jednej z gałęzi mamy dodatkowo dopełnienie wybranej przez nas formuły.

Zarazem jednak ST bez dołączenia jakiejś formy cięcia lub innych dodatkowych technik[11] nie może p-symulować KE-drzew dowodowych. D'Agostino podaje przykłady, dla których symulacja w ST wymaga wykładniczego wzrostu wielkości drzewa dowodowego. Ponieważ KE może także p-symulować rezolucję oraz inne systemy automatycznego dowodzenia, a te systemy mogą p-symulować KE, więc z tego punktu widzenia standardowe ST należy do klasy systemów o niższym poziomie efektywności. Jak widać, to właśnie obecność różnych form cięcia zapewnia uzyskiwanie krótszych dowodów.

[10] Chodzi o wydajną symulację, której wielkość ograniczona jest wzorem wielomianowym, a nie wykładniczym – te drugie uchodzą za praktycznie nieprzydatne.

[11] Należy do nich np. użycie lematów lub merging omawiane m.in. w (D'Agostino 1999).

W tym miejscu warto poczynić dygresję o systemie Davisa i Putnama, który w przypadku KRZ uchodzi za najbardziej efektywny. Jest to system, w którym również operuje się na klauzulach, ale można powiedzieć, że mechanizm związany z zastosowaniem cięcia jest stosowany na dwa dualne sposoby. Otóż systemy rezolucyjne wykorzystują cięcie tylko progresywnie (jako (Rez)), czyli„wycinając" sprzeczne literały, co intuicyjnie odpowiada zastosowaniu zasady niesprzeczości. Dla odmiany w KE i ST cięcie (jako reguła (PB)) stosowane jest tylko regresywnie, tzn. przez dołączanie sprzecznych formuł do osobnych gałęzi, co odpowiada prawu wyłączonego środka. W systemie Davisa i Putnama występują reguły odpowiadające obu tym formom. Jest to więc system dedukcyjny, który maksymalnie wykorzystuje siłę cięcia, i być może właśnie to jest przyczyną jego efektywności.

Systemy, w których cięcie nie daje się wyeliminować (jest regułą pierwotną i nieredukowalną, a nie wyłącznie dopuszczalną), określimy jako cut-systemy. Jak widać, klasa systemów analitycznych i klasa cut-systemów krzyżują się. Standardowy system ST dla KRZ to przykład systemu analitycznego bez cięcia. KE bądź system rezolucyjny należą do przekroju obu klas: są analityczne, ale usunięcie cięcia prowadzi do utraty pełności. Dowolny system aksjomatyczny lub standardowy system DN to cut-system nieanalityczny. W przypadku systemów aksjomatycznych cięcie występuje *implicite* jako przechodniość dedukowalności oraz *explicite* jako reguła Modus Ponens (MP), będąca specjalną formą cięcia. W przypadku DN cięcie jest reprezentowane dodatkowo poprzez stosowanie reguły dowodu nie wprost.

Przypadek DN jest interesujący, bo mamy tutaj do czynienia z rodziną cut-systemów, które nie są analityczne, ale można je do takiej formy sprowadzić, nie tracąc pełności. Ponadto taki zabieg zwiększa przydatność DN jako narzędzia poszukiwania dowodu.

W standardowym systemie DN jeżeli nie możemy skonstruować dowodu, to nie daje nam to podstaw do określenia statusu dowodzonej formuły. Nie wiemy, czy dowód się nie udaje, bo formuła nie jest tezą, czy też dlatego, że nie jesteśmy wystarczająco inteligentni, aby go znaleźć. Jednak DN można sprowadzić do takiej postaci formalizacji, która pozwala nie tylko dowodzić, ale również budować na podstawie uzyskanej derywacji model falsyfikujący. Co więcej, można w DN w sposób mechaniczny poszukiwać dowodu, co daje nam praktyczną procedurę rozstrzygalności dla KRZ i dla wielu logik nieklasycznych, np. modalnych (por. [Indrzejczak 2010]). Jest tak dlatego, że brak własności podformuł nie wyklucza oczywiście analityczności systemu w sensie 7. Istnieje silna tradycja badania analitycznych systemów DN zapoczątkowana w pracach D. Prawitza (1965). Konstruktywne dowody twierdzeń o normalizacji dowodów w DN pokazują, że dla wielu logik można dowolny DN-dowód przekształcić w tzw. dowód normalny. W dowodzie takim występują jedynie formuły i negacje formuł, które są podformułami dowodzonego wniosku i przesłanek. Dowody takie są zatem analityczne w sensie 7. Teoretyczną ważność tych wyników trudno jest przecenić, ale z punktu widzenia praktycznych zastosowań dają one niewiele. Sytuacja jest zbliżona do tej, która występuje w przypadku dowodów twierdzeń o eliminacji cięcia w RS; nie pokazują one, w jaki sposób szukać analitycznego dowodu, a tylko, że gotowy dowód można do takiej postaci sprowadzić.

Można jednak skoncentrować się na praktycznej stronie dowodzenia, na konstrukcji systemów DN, które pozwolą budować tylko analityczne dowody (i nie tylko dowody). W (Indrzejczak 2010) przedstawione są dwie analityczne wersje DN: bardziej restryktywna ADN1 i bardziej liberalna ADN2. Podstawą konstrukcji ADN1 jest działanie systemu KE. Nietrudno zauważyć, że wszystkie linearne reguły KE są regułami inferencji (pierwotnymi lub wtórnymi) systemu DN, ale nie odwrotnie. Jedyna różnica to obecność rozgałęziającej reguły (PB); poza tym KE wydaje się bliższe systemom DN niż standardowym systemom tablicowym. Jednak wszystko, co można udowodnić z pomocą (PB) (czy w ogóle jakiejś formy cięcia), można udowodnić z pomocą dowodu nie wprost w oparciu o dodatkowe założenie, pod warunkiem że inne reguły są takie same. Otóż wprowadzone założenie dodatkowe odpowiada cut-formule z jednej z gałęzi, a formuła uzyskana w dowodzie nadrzędnym (po dojściu do sprzeczności w poddowodzie) odpowiada drugiej cut-formule. Jeżeli na dołączanie założeń nie wprost nałożymy takie warunki jak w KE na stosowanie (PB), to uzyskujemy dowody analityczne w znaczeniu 7. Zresztą nie tylko dowody; w systemie ADN1 można dokonać p-symulacji każdej (otwartej czy zamkniętej) tablicy KE przez indukcję po liczbie użyć (PB), otrzymując w rezultacie również dedukcje falsyfikujące dla formuł niebędących tezami. Opis algorytmu, który przekształca drzewa dowodowe KE w dedukcje w ADN1, można znaleźć w (Indrzejczak 2010). Nieco inne rozwiązanie tego problemu zaproponował wcześniej Smullyan (1965), który bezpośrednio odtwarza drzewa ST jako dowody w analitycznym wariancie DN, gdzie wprowadza jako pierwotne środki reguły konstrukcji dowodu symulujące działanie reguł rozgałęziających w ST. Można się jednak zastanawiać, czy to jeszcze system DN, a nie jedynie ST z drzewami przerobionymi na zagnieżdzone ciągi. W słabszej postaci zarzut ten można postawić zresztą również ADN1, gdyż nie wykorzystuje się tam reguł dołączania stałych, a tylko reguły eliminacji i dowód nie wprost.

W przypadku ADN2 pojawia się jeszcze dalej idąca liberalizacja dowodu w DN, która dopuszcza analityczne zastosowania reguł dołączania, a także konstruowanie dowodów wprost i dowodów warunkowych.

Na przykład dopuszczalne jest zastosowanie reguły dołączania alternatywy pod warunkiem, że dołączona w ten sposób formuła jest podformułą (względnie negacją podformuły) dowodzonego wniosku lub przyjętych przesłanek. W rezultacie ADN2 dostarcza przepisu budowania dowodów normalnych. Co więcej, oba rodzaje analitycznych systemów DN można poszerzyć w taki sposób, by uzyskać analityczne formalizacje wielu logik modalnych i hybrydowych, w tym również w taki sposób, że pozwalają na wykorzystanie strategii stosowanych w systemach rezolucji.

6. Inne zastosowania terminu „analityczny"

Omówione wyżej koncepcje analitycznego dowodu z pewnością nie zamykają listy zastosowań terminu „analityczny" w obrębie badań teoriodowodowych. Na zakończenie wspomnimy krótko o dwóch sposobach rozumienia analitycznej dedukcji oraz o koncepcji strukturalnej analizy terminów logicznych.

Athanassios Tzouvaras (1996), nawiązując do koncepcji implikacji analitycznej Williama T. Parry'ego oraz prac Paula Weingartnera i Schurza dotyczących kryteriów relewancji dla relacji dedukowalności, zaproponował interesującą modyfikację RS. Punktem wyjścia jest pojęcie analitycznej relacji dedukowalności $\vdash^a$, która jest podrelacją klasycznej $\vdash$ w tym sensie, że:

$$\Gamma \vdash^a \varphi \text{ wtw } \Gamma \vdash \varphi \text{ i } ZZ(\varphi) \subseteq ZZ(\Gamma)$$

gdzie ZZ oznacza zbiór zmiennych zdaniowych występujących w danej formule czy zbiorze formuł.

Wprawdzie występujące tu pojęcie analityczności jest zapożyczone od Parry'ego, ale logika w ten sposób skonstruowana jest słabsza od logiki implikacji analitycznej. Zauważmy, że relacja dedukowalności generowana przez aksjomatyzację logiki Parry'ego nie spełnia warunku analityczności. W tej ostatniej warunek zawierania dotyczy bowiem tylko implikacji, tzn. warunkiem koniecznym tego, aby $\varphi \to \psi$ była tezą, jest wymóg $ZZ(\psi) \subseteq ZZ(\varphi)$. Jednak ze względu na zachodzenie twierdzenia o dedukcji jest możliwe, że $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ w systemie Parry'ego, choć wydedukowana implikacja zawiera zmienne niewystępujące w Γ. Tzouvaras skonstruował RS formalizujące logikę tak rozumianej analitycznej dedukcji przez nałożenie warunku zawierania się zmiennych na wybrane reguły. Aby warunek zawierania się zmiennych dla każdego dowiedlnego sekwentu był spełniony, należy aksjomaty ograniczyć do takich sekwentów $\Gamma \Rightarrow \Delta$, że $ZZ(\Delta) \subseteq ZZ(\Gamma)$ oraz ograniczyć zastosowanie reguł $(\Rightarrow\to)$ i $(\Rightarrow\neg)$ do takich przypadków, gdzie $ZZ(\varphi) \subseteq ZZ(\Gamma)$ na podanych przez nas w rozdziale *Systemy dedukcyjne* schematach reguł. Dla systemu tego zachodzi twierdzenie o eliminacji cięcia, zatem jest on nie tylko ściśle analityczny (ma własność podformuł) ale wręcz hiperanalityczny. Oczywiście nie jest to klasyczny rachunek zdań, ale logika słabsza nawet od logiki implikacji analitycznej Parry'ego.

Jeszcze inna koncepcja analitycznej dedukcji pojawia się u Prawitza (2019). Z podanym wyżej jest zbieżna tylko w tym sensie, że oparta jest również na relacji zawierania. Tym razem jednak chodzi o zawieranie się nie zmiennych (czy szerzej formuł atomowych), ale zawierania się rozumowań (formalnych). Prawitz analizuje pojęcie analitycznej dedukcji w abstrakcyjny sposób, nie relatywizując go do konkretnego typu systemu dedukcyjnego czy zestawu reguł. Zaprezentowanie jego propozycji w precyzyjny sposób zajęłoby zbyt dużo miejsca, zatem ograniczymy się do przybliżenia idei. Rozumowanie może mieć dowolny stopień złożoności, poczynając od pojedynczego zastosowania reguły. Prawitz definiuje analityczną dedukcję rekurencyjnie jako taką, w której każde składowe rozumowanie jest analityczne. Kluczowe jest więc tutaj wstępne ustalenie, które proste rozumowania spełniają ten warunek.

O ile oba naszkicowane wyżej rozumienia analityczności opierają się na relacji zawierania (zmiennych, reguł), o tyle koncepcja Kosty Došena ma całkowicie inny charakter. Podjął on próbę sformułowania kryteriów logiczności w terminach analizy strukturalnej. Analiza jest tu zatem oparta na relacji redukowalności języka ze stałymi logicznymi do języka takich stałych nieposiadającego.

Došen (1989) zaproponował tzw. strukturalną wersję LK w języku bez negacji, ale z $\bot$, w której pierwotny (i nieeliminowalny) jest zestaw reguł strukturalnych, natomiast każda stała logiczna jest scharakteryzowana za pomocą jednej, ale obustronnie poprawnej reguły:

$$(\rightarrow)\,\frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}\qquad(\wedge)\,\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}\qquad(\vee)\,\frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

W każdym przypadku mamy oprócz reguły wprowadzania również reguły eliminacji danej stałej (czytając schemat od dołu). Łatwo też wykazać, że brakujące reguły wprowadzania stałych z RS Gentzena są regułami wyprowadzalnymi w systemie Došena (przy użyciu (Cut)).

System Došena służy ilustracji jego przekonań odnośnie do kryteriów logiczności, a dokładniej próby ustalenia, co to jest stała logiczna. Punktem wyjścia analizy stałych logicznych jest dla Došena przekonanie, że logika jest nauką o formalnych dowodach. W jego ujęciu dowód formalny to inaczej dowód strukturalny, czyli taki dowód w RS, w którym zastosowano jedynie reguły strukturalne. Wyrażenie jest według Došena logiczne, gdy poddaje się analizie czysto strukturalnej. Obustronne reguły logiczne w jego systemie są w tym sensie wyrazem takiej analizy, że po jednej stronie kreski mamy sekwenty czysto strukturalne, tj. niezawierające wystąpienia żadnej stałej logicznej. Zdaniem Došena aby jakieś wyrażenie można było uznać za stałą logiczną, konieczne jest znalezienie obustronnych reguł tego typu, które po dołączeniu do zestawu reguł strukturalnych pozwalają uzyskać pełną i jednoznaczną charakterystykę danej stałej. Warto zauważyć, że tego kryterium logiczności nie spełnia wiele wyrażeń, np. funktory modalne, które powszechnie są traktowane jako stałe logiczne. Jednak przy przejściu do uogólnionych postaci RS można znaleźć bardziej zadowalające zestawy reguł (por. np. [Wansing 1999] lub [Gratzl, Orlandelli 2019]).

Na koniec warto wspomnieć, że podobna idea wystąpiła znacznie wcześniej w dwóch pracach Karla Poppera (1947a, 1947b), gdzie była jednak słabo wyartykułowana i związana z wadliwą próbą zbudowania teoriodowodowej semantyki. Projekt Poppera został poddany krytyce przez wielu logików, m.in. Stephena Cole'a Kleene'ego i Haskella Curry'ego, ze względu na jego niespójność. Tym niemniej, jak przekonująco pokazał Peter Schroeder-Heister (1984), prace Poppera zawierały interesującą propozycję określenia kryteriów bycia stałą logiczną.

Bibliografia

D'Agostino M. (1999), *Tableau Methods for Classical Propositional Logic*, [w:] M. D'Agostino, D. Gabbay, R. Hähnle, J. Possega (red.) (1999), *Handbookof Tableau Methods*, s. 45–123, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

D'Agostino M., Gabbay D., Hähnle R., Possega J. (red.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Avron A. (1993), *Gentzen-type systems, Resolution and Tableaux*, „Journal of Automated Reasoning" 10/2, s. 265–281.

Belnap N.D. (1982), *Display Logic*, „Journal of Philosophical Logic" 11, s. 375–417.

Beth E. (1955), *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Noord Hollandsche Uitgevers Maatschappij, Amsterdam.

Boolos G. (1984), *Don't Eliminate Cut*, „Logic Journal of Philosophical Logic" 7, s. 373–378.

Chang C.L., Lee R.C.T. (1973), *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, Orlando.

Davis M., Putnam H. (1960), *A Computing Procedure for Quantification Theory*, „Journal of the Association for Computing Machinery" 7, s. 201–215.

Došen K. (1989), *Logical Constants as Punctuation Marks*, „Notre Dame Journalof Formal Logic" 30, s. 362–381.

Fariñas del Cerro L., Herzig A. (1995), *Modal Deduction with Applications in Epistemic and Temporal Logics*, [w:] D. Gabbay (red.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. IV, s. 499–594, Clarendon Press, Oxford.

Fitting M. (1983), *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, Reidel, Dordrecht.
Fitting M. (1996), *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer, Berlin, Dordrecht.
Gallier J.H. (1986), *Logic for Computer Science*, Harper and Row, New York.
Gentzen G. (1934), *Untersuchungen über das Logische Schliessen*, „Mathematische Zeitschrift" 39, s. 176–210; 405–431.
Gentzen G. (1936), *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, „Mathematische Annalen" 112, s. 493–565.
Goré R. (1999), *Tableau Methods for Modal and Temporal Logics*, [w:] M. D'Agostino, D. Gabbay, R. Hähnle, J. Possega (red.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*, s. 297–396, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Gratzl N., Orlandelli E. (2019), *Logicality, Double-line Rules, and Modalities*, „Studia Logica" 107/1, s. 85–108.
Hintikka J. (1955), *Form and Content in Quantification Theory*, „Acta Philosophica Fennica" 8, s. 8–55.
Indrzejczak A. (2010), *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*, Springer, Dordrecht.
Indrzejczak A., Zawiddzki M., (2013), *Decision Procedures for Some Strong Hybrid Logics*, „Logic and Logical Philosophy" 22, s. 389–409.
Jaśkowski S. (1934), *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*, „Studia Logica" 1, s. 5–32.
Loveland D.W. (1978), *Automated Theorem Proving: a Logical Basis*, North Holland, Amsterdam.
Mints G. (1970), *Cut-free calculi of the S5 type*, „Studies in Constructive Mathematics and Mathematical Logic" 2, s. 79–82.

De Nivelle H.R., Schmidt A., Hustadt U. (2000), *Resolution-based Methods for Modal Logics*, „Logic Journal of the IGPL" 8/3, s. 265–292.
Orłowska E., Golińska-Pilarek J. (2011), *Dual Tableaux: Foundations, Methodology. Case Studies*, Springer, Dordrecht.
Poggiolesi F. (2011), *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic*, Springer, Dordrecht.
Popper K. (1947a), *Logic without Assumptions*, „Proceedings of the Aristotelian Society" 47, s. 251–292.
Popper K. (1947b), *New Foundations for Logic*, „Mind" 56, 223, s. 193–235.
Prawitz D. (1965), *Natural Deduction*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.
Prawitz D. (2019), *The Fundamental Problem of General Proof Theory*, „Studia Logica" 107/1, s. 11–30.
Prawitz H., Prawitz D., Voghera N. (1960), *A Mechanical Proof Procedure and its Realization in an Electronic Computer*, „Journal of the Association for Computing Machinery" 7, s. 102–128.
Priest G. (2001), *An Introduction to Non-classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
Rasiowa H., Sikorski R. (1963), *The Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa.
Robinson J.A. (1965), *A Machine Oriented Logic based on the Resolution Principle*, „Journal of the Association for Computing Machinery" 12, s. 23–41.
Schroeder-Heister P. (1984), *Popper's Theory of Deductive Inference and the Concept of a Logical Constant*, „History and Philosophy of Logic" 5, s. 79–110.
Schütte K. (1977), *Proof Theory*, Springer, Berlin.
Smullyan R. (1965), *Analytic Natural Deduction*, „The Journal of Symbolic Logic" 30/2, s. 123–139.
Smullyan R. (1968), *First-Order Logic*, Springer, Berlin.

Takano M. (1992), *Subformula Property as a substitute for Cut-Elimination in Modal Propositional Logics*, „Mathematica Japonica" 37, 6, s. 1129–1145.
Tzouvaras A. (1996), *Aspects of Analytic Deduction*, „Journal of Philosophical Logic" 25, s. 581–596.
Wang H. (1960), *Toward Mechanical Mathematics*, „IBM Journal of Research and Development" 4, s. 2–22.
Wansing H. (1999), *Displaying Modal Logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Woleński J. (1993), *Metamatematyka a epistemologia*, PWN, Warszawa.

Streszczenie: *O rozumieniu analityczności w teorii dowodu*

W pracy rozważane są różne pojęcia dowodu analitycznego. Po krótkim przypomnieniu historycznie ważnych podejść do tego pojęcia praca koncentruje się na współczesnym rozumieniu terminu. W szczególności przebadane są relacje pomiędzy eliminacją cięcia, własnością podformuł i analitycznością dowodu w rachunku sekwentów.

Słowa kluczowe: dowód analityczny, rachunek sekwentów, własność podformuł

Summary: *On the Notion of Analyticity in Proof Theory*

Several notions of analytic proof are considered in the paper. After brief recollection of historically important approaches to this notion we focus on contemporary applications of this term. In particular, the relationships between cut elimination, subformula property and analyticity of proof in sequent calculus are examined.

Keywords: analytical proof, sequent calculus, subformula property